

DESCRIPTION DES NOYAUX A IMPAIR
EN TERMES DE BOSONS ET DE FERMIONS EN INTERACTION

M. VERGNES

Institut de Physique Nucléaire d'Orsay

* * *

Résumé

Les noyaux de A impair sont décrits dans le modèle IBFM comme constitués d'un coeur pair-pair (décrit par le modèle des bosons en interaction) et d'un certain nombre de fermions. Dans le cas général, l'Hamiltonien est diagonalisé numériquement après un certain nombre d'approximations. Les résultats d'un calcul typique sont comparés à l'expérience.

Dans certains cas particuliers, il est possible d'obtenir des expressions analytiques pour les quantités mesurables expérimentalement. Ces cas limites sont les symétries de Bose-Fermi pour les noyaux de A impair et les supersymétries, qui décrivent à la fois les noyaux pair-pair et de A impair. Les modèles de symétrie Bose-Fermi Spin (6) et de supersymétrie $U(6/4)$ sont décrits en détails et comparés à l'expérience. Les modèles plus récents de supersymétries "multi-j" $U(6/12)$, l'extension de la supersymétrie aux noyaux impair-impairs et la supersymétrie généralisée sont seulement effleurés.

Abstract

The odd-A nuclei are considered in the IBFM model to consist of an even-even core (described by the interacting boson model) and of a few fermions. In the general case the Hamiltonian is numerically diagonalized after a number of approximations. The results of a typical calculation are compared to experiment.

In special cases it is possible to obtain analytical expressions for experimentally measurable quantities. These limiting cases are the Bose-Fermi symmetries for odd-A nuclei and the supersymmetries describing simultaneously both even-even and odd-A nuclei. The Bose-Fermi Spin (6) and the $U(6/4)$ supersymmetry models are described in details and compared to experiments. The more recent "multi-j" $U(6/12)$ supersymmetry models, the extension of supersymmetry to the odd-odd nuclei and the generalized supersymmetry, are only briefly discussed.

* * *

I - INTRODUCTION

I.A Généralités

On peut dire que le trait le plus caractéristique des modèles basés sur la notion de bosons en interaction, est l'existence de symétries dynamiques, mises en évidence dans le cadre de la théorie des groupes.

Dominique Goutte a traité les noyaux pair-pairs, décrits¹ dans le modèle IBM comme constitués de bosons s et d (... g). Il a expliqué ce que sont les symétries dynamiques en physique nucléaire et montré en particulier, dans le cadre du modèle IBM.1, celles provenant de la décomposition en chaînes de sous-groupes du groupe U(6) des bosons s et d. Ce sont les symétries U(5), SU(3) et O(6), dont les analogues géométriques les plus proches sont respectivement le vibreur anharmonique, le rotor axial et le vibreur γ -instable de Wilets et Jean. Une quatrième symétrie a été mise en évidence plus récemment dans le cadre du modèle IBM.2, la symétrie SU*(3), correspondant à l'image géométrique d'un rotor triaxial. Toutes ces symétries sont des symétries de bosons.

D'autres symétries dynamiques avaient été préalablement mises en évidence et utilisées en physique nucléaire et en physique des particules. Nous citerons la description de l'atome d'hydrogène voici plus de 50 ans par Pauli et Fock en utilisant le groupe O(4), les supermultiplets de Wigner² et la symétrie SU(3) de Gell-Mann et Ne'eman³, appliquée d'abord à l'octet des hadrons.

Ce qu'il faut bien retenir dans tous les cas c'est que, quand un système complexe présente une symétrie dynamique, il est possible d'écrire de façon analytique et compacte les grandeurs mesurables et souvent de mieux comprendre la physique sous-jacente.

Les symétries discutées ou rappelées ci-dessus s'appliquent séparément soit à un système de bosons, soit à un système de fermions et les groupes correspondants sont les groupes de Lie normaux (développés voici environ 80 ans). Les noyaux de A impair, sujet essentiel de cet exposé, seront considérés comme constitués à la fois de bosons[†] et de fermions. Il peut donc être utile de faire d'abord quelques brefs rappels sur les bosons et les fermions et un très rapide survol de ce qu'on appelle supersymétrie en physique des particules.

I.B Rappels

I.B.1 Particules identiques et symétrisation

Il a été nécessaire, pour lever des ambiguïtés dans le cas de systèmes de n particules identiques, d'introduire dans la mécanique quantique un postulat de symétrisation⁴ :

Si un système contient n particules identiques, ses états dynamiques, par rapport aux permutations de ces n particules, sont

- . ou bien tous symétriques : les particules sont des "bosons"
- . ou bien tous antisymétriques : les particules sont des "fermions".

[†] Bien entendu, d'un point de vue microscopique les bosons du modèle IBM sont considérés comme des paires corrélées de fermions. Dans le cadre de plusieurs des modèles décrits ici, ce sont toutefois des particules sans structure.

L'expérience montre que

- les particules de spin demi-entier (électrons, nucléons, quarks,...) sont des fermions. Ces particules sont les constituants de base de la matière.
- les particules de spin entier (photons, gluons, mésons...) sont des bosons. Ces particules sont celles qui, par leur échange, transmettent les forces.

Un gaz (grand nombre de particules avec de très faibles interactions) de bosons obéit à la statistique de Bose-Einstein, un gaz de fermions à celle de Fermi-Dirac. Deux fermions ne peuvent occuper le même état quantique individuel : principe d'exclusion de Pauli^{††}.

I.B.2 Statistique des noyaux d'atomes

- . Si le nombre de nucléons est pair : statistique de Bose-Einstein
- . Si le nombre de nucléons est impair : statistique de Fermi-Dirac.

On peut citer un exemple très frappant de cette différence de statistique, dans un cas où l'aspect nucléaire pourrait sembler peu important. Aux très basses températures ³He et ⁴He liquides se comportent de façon fondamentalement différente. En dessous de 2.2° K (point λ), ⁴He -bosonique- montre des propriétés remarquables dues au phénomène de superfluidité. Ce phénomène est considéré comme lié à la condensation, à très basse température, de tous les noyaux dans l'état quantique le plus bas (condensation de Bose-Einstein). Un tel phénomène est interdit pour ³He -fermionique- à cause du principe de Pauli... en effet, ³He ne présente ni point λ, ni superfluidité.

I.B.3 La supersymétrie des particules élémentaires⁵

Cette théorie postule que pour chaque particule ordinaire (celles dont il vient d'être question) il existe un partenaire identique en tout (nombres quantiques, masse), sauf en ce qui concerne le spin qui diffère de 1/2 (ħ).

Particule ordinaire	Spin	Partenaire	Spin
fermion	1/2	boson	0
boson	0, 1, 2	fermion	1/2, 1/2, 3/2

†† On peut dire⁵ d'une certaine façon que les fermions sont des êtres "antisociaux" qui tendent à occuper des états quantiques différents. A l'opposé, les bosons sont "grégaire" et tendent à se grouper sur les mêmes états quantiques.

Les partenaires des particules ordinaires sont activement recherchées au moyen d'accélérateurs géants : les collisionneurs d'électrons ou de hadrons... jusqu'ici sans succès. Il est cependant clair que la supersymétrie, si elle existe, doit être brisée, c'est à dire par exemple que la masse du partenaire de l'électron ne peut être identique à celle de l'électron : elle doit être beaucoup plus grande (on observerait sinon des atomes très curieux car -les bosons ne respectant pas le principe de Pauli- la classification périodique serait bouleversée).

La supersymétrie diffère de toutes les théories plus anciennes en ce qu'elle relie deux classes fondamentalement différentes de particules : les fermions et les bosons. Les groupes correspondants (développés à partir de 1970) sont appelés groupes de Lie "gradés" ou supergroupes.

II - LES NOYAUX DE A IMPAIR ET LE MODELE IBFM^{1,6,7}

Un noyau de A impair peut être considéré comme constitué de bosons et d'un certain nombre de fermions non appariés en bosons.

Les degrés de liberté des bosons sont décrits par un Hamiltonien H_B (ici celui de IBM.1) qui s'écrit en fonction des générateurs* $B_{\alpha\beta} = b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}$ du groupe $U^B(6)$ (b^{\dagger} étant l'opérateur de création, b l'opérateur de destruction d'un boson) sous la forme :

$$H_B = E_0 + \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\alpha\beta\gamma\delta} B_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta} \quad (1)$$

où les termes ont été inclus jusqu'aux interactions à 2 corps (comprises).

Les états de bosons sont construits par applications répétées des opérateurs b_{α}^{\dagger} sur le vide (b_{α}^{\dagger} représente s^{\dagger} ou d^{\dagger}) :

$$\mathcal{B} : b_{\alpha}^{\dagger} \dots | 0 \rangle \quad (2)$$

Ces états forment des représentations totalement symétriques du groupe $U^B(6)$; ils sont caractérisés par le nombre N de bosons.

Les degrés de liberté purement fermioniques sont décrits par un Hamiltonien H_F ; la dégénérescence de l'espace des fermions est $\Omega = \sum_j (2j + 1)$, la somme s'étendant aux orbites permises aux fermions. Soit a_j^{\dagger} et a_j les opérateurs de création et d'annihilation d'un fermion sur l'orbite j, les produits $A_{ij} = a_i^{\dagger} a_j$ sont les générateurs* du groupe $U^F(\Omega)$ décrivant les fermions. On peut alors écrire H_F sous la forme :

$$H_F = \epsilon_0 + \sum_j \eta_j A_{jj} + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} v_{ijkl} A_{ij} A_{kl} \quad (3)$$

* On utilise souvent d'autres générateurs, couplés à un bon moment angulaire λ , projection μ (notation de Racah) :

- pour les bosons, les générateurs $B_{\mu}^{(\lambda)}$ (36 générateurs) du groupe $U^B(6)$ s'écrivent :
 $B_{\mu}^{(\lambda)}(\ell, \ell') = (b_{\ell}^{\dagger} \times b_{\ell'})_{\mu}^{(\lambda)}$; $\lambda = 0, \dots, 4$

ℓ et ℓ' étant les moments angulaires (0 ou 2) des bosons.

- pour les fermions, les générateurs $A_{\mu}^{(\lambda)}$ (Ω^2 générateurs) du groupe $U^F(\Omega)$ s'écrivent :
 $A_{\mu}^{(\lambda)}(j, j') = (a_j^{\dagger} \times a_{j'})_{\mu}^{(\lambda)}$.

Si on ne considère qu'un seul fermion, le dernier terme (à 2 corps) disparaît ; η_j est l'énergie du fermion sur l'orbite j . Les états du noyau de A impair peuvent être construits par applications répétées des opérateurs b_α^\dagger et a_j^\dagger sur le vide :

$$\mathcal{BF} : a_j^\dagger \dots b_\alpha^\dagger \dots | 0 \rangle \quad (4)$$

Ces états forment des représentations du groupe produit $U^B(6) \otimes U^F(\Omega)$. Nous reviendrons plus loin sur ce groupe dont on peut dire, de façon un peu plus imprécise, qu'il "décrit" la structure de groupe de l'Hamiltonien $H_0 = H_B + H_F$.

Si il n'y avait aucune interaction entre les bosons et les fermions, l'Hamiltonien du système serait simplement H_0 . En fait, il y a une interaction V_{BF} entre bosons et fermions et :

$$H = H_B + H_F + V_{BF} \quad (5)$$

L'interaction résiduelle V_{BF} s'écrit elle aussi, de façon très générale, en fonction des générateurs des groupes $U^B(6)$ et $U^F(\Omega)$:

$$V_{BF} = \sum_{\alpha\beta ij} W_{\alpha\beta ij} B_{\alpha\beta} A_{ij} \quad (6)$$

A partir de ce point, il y a deux voies -à première vue très différentes- pour obtenir des résultats numériques. De façon humoristique et schématique elles peuvent être décrites comme :

- la voie de l'ordinateur
- la voie des groupes.

Nous allons parcourir très superficiellement la première, avec quelques exemples, pour nous étendre davantage ensuite sur la seconde.

Dans la réalité, les deux voies utilisent plus ou moins l'ordinateur et se révèlent en pratique plus complémentaires que concurrentes. La première est compliquée et peu transparente, mais peut, moyennant de nombreuses approximations, être utilisée dans le cas général. La seconde est simple et élégante mais ne peut s'appliquer -jusqu'à présent- qu'à des cas très particuliers. Ces deux voies sont tout à fait analogues à celles¹ du modèle IBM.1 : les calculs IBM.1 sur ordinateur et les trois limites du modèle.

III - CALCULS IBFM SUR ORDINATEUR⁷

III.A Les méthodes

La difficulté est d'abord de calculer l'interaction V_{BF} . Très schématiquement nous dirons seulement pour une certaine compréhension intuitive de la physique sous-jacente qu'elle apparaît comme essentiellement due -au niveau microscopique- à une forte interaction quadrupole-quadrupole entre neutrons et protons. Elle a pu être dérivée de façon microscopique, à partir des interactions entre fermions dans le modèle des couches, en utilisant des procédures de "mapping" entre espace de fermions et espace de bosons et en faisant un certain nombre d'approximations. Bref, O. Scholten⁷ donne le résultat suivant :

$$\left. \begin{aligned} V_{BF} = & \sum_j A_j (d^\dagger \times \tilde{d})^{(0)} (a_j^\dagger \times \tilde{a}_j)^{(0)} + \sum_{jj'} \Gamma_{jj'} [Q^{(2)} \times (a_j^\dagger \times \tilde{a}_j)^{(2)}]_0^{(0)} \\ & + \sum_{jj'j''} \Lambda_{jj'j''} : [(d^\dagger \times \tilde{a}_j)^{(j'')} \times (a_j^\dagger \times \tilde{d})^{(j'')}]_0^{(0)} : , \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

où A_j , Γ_{jj} , et $\Lambda_{jj}^{j''}$, sont des paramètres (matrices de paramètres).

$$Q^{(2)} = (s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times s)^{(2)} + \chi(d^\dagger \times \tilde{d})^{(2)},$$

$$\tilde{d}_m = (-1)^m d_m, \quad \tilde{a}_{jm} = (-1)^{j-m} a_{j-m}.$$

Le premier terme est une interaction dite "monopolaire", peu importante, le second est une interaction quadrupolaire, le troisième un terme d'échange. Ce dernier est étroitement relié au principe de Pauli et provient du fait que les bosons sont eux-mêmes composés de fermions qui peuvent occuper les mêmes orbites que le (ou les) fermion(s) considéré(s) de façon individuelle.

Il est évident en regardant la formule (7) que le nombre des paramètres est beaucoup trop considérable pour une utilisation pratique. Des calculs microscopiques permettent toutefois de déterminer la dépendance en j , j' , j'' moyennant, ici encore, un certain nombre d'approximations⁷ :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{jj} &= \Gamma_0(u_j u_j - v_j v_j) Q_{jj}, \\ \Lambda_{jj}^{j''} &= -2\sqrt{5} \Lambda_0 \beta_{jj} \beta_{jj}^{j''} / \sqrt{2j''+1} \\ \beta_{jj} &= (u_j v_j + v_j u_j) Q_{jj}, \\ u_j^2 &= 1 - v_j^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

v_j^2 étant la probabilité d'occupation de l'orbite j du modèle des couches et Q_{jj} , les éléments de matrice à une particule de l'opérateur quadrupolaire. Ces formules se simplifient encore si une seule orbite j est considérée, ou plusieurs mais ayant des occupations identiques.

Nous donnerons seulement un exemple de calculs effectués dans ce cadre. Ils utilisent le programme ODDA écrit par O. Scholten.

III.B Niveaux des isotopes de Eu^7

Les noyaux d'Eu sont décrits comme un proton couplé aux coeurs bosoniques des Sm. Les paramètres des coeurs sont tirés de calculs déjà publiés pour les Sm. Le comportement en fonction du nombre de neutrons des niveaux théoriques de parité positive, obtenus en considérant les deux orbites $d_{5/2}$ et $g_{7/2}$ (qui, proches, sont supposées avoir des occupations identiques) est comparé dans la Figure 1 au comportement observé expérimentalement.

Il faut remarquer que les Eu, comme les Sm, traversent une transition de forme sphérique \rightarrow déformée bien connue quand le nombre de neutrons passe de 88 à 90. Cette transition est bien reproduite par les calculs sur ordinateur.

Bien entendu, les comparaisons d'énergies de niveaux ne constituent que l'un des tests des modèles. D'autres tests importants concernent les probabilités des transitions électromagnétiques, $B(E2)$ et $B(M1)$ en particulier, et les probabilités des réactions de transfert de 1 et 2 nucléons. Pour alléger l'exposé, les expressions⁷ de tous les opérateurs correspondants, qui sont généralement obtenues par une procédure de "mapping", ne seront pas données ici. D. Goutte a indiqué la forme de $T(E2)$ pour le modèle des bosons en interaction ; dans le cadre de IBFM on peut écrire :

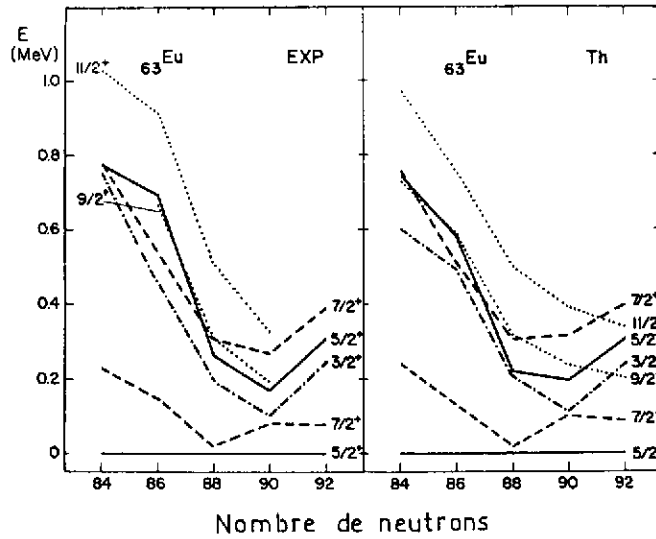


Figure 1 : Comparaison des énergies expérimentales et théoriques (IBFM) pour les niveaux de parité positive des Eu dans la zone de transition au voisinage de 88-90 neutrons.

$$\begin{aligned}
 T(E2) &= e_B Q_B^{(2)} + e_F Q_F^{(2)}, \\
 \text{avec} \quad Q_B^{(2)} &= (s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times s)^{(2)} + \chi (d^\dagger \times \tilde{d})^{(2)}, \\
 \text{et} \quad Q_F^{(2)} &= \sum_{jj'} Q_{jj'} (a_j^\dagger \times a_{j'})^{(2)}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Avec une charge effective e_B tirée de l'étude des Sm et en prenant $e_F = e_B$ (des arguments microscopiques montrent que $e_F \sim e_B$), on obtient pour les transitions entre niveaux de parité positive dans ^{153}Eu les valeurs indiquées dans le Tableau I (tirées et adaptées de la Réf. 7).

En utilisant des opérateurs de transfert d'un nucléon assez compliqués⁷, mais dont les paramètres sont les mêmes que ceux de l'Hamiltonien donc déjà fixés, les facteurs spectroscopiques S pour les réactions $\text{Sm}(^3\text{He}, d)\text{Eu}$ ont pu être calculés. Les résultats pour les transferts d 5/2 sont montrés dans la Figure 2.

Tableau I - Comparaison des valeurs expérimentales et théoriques des $B(E2)$, en e^2b^2 , pour un certain nombre de transitions dans ^{153}Eu .

Transition	$B(E2)$ exp. (moyenne)	$B(E2)$ IBFM	
$7/2_1^+ \rightarrow 5/2_1^+$	1,62	1,12	fortes
$9/2_1^+ \rightarrow 7/2_1^+$	0,87	0,92	
$9/2_1^+ \rightarrow 5/2_1^+$	0,45	0,33	
$5/2_2^+ \rightarrow 3/2_1^+$	0,75	1,07	
$3/2_1^+ \rightarrow 5/2_1^+$	0,007	0,06	faibles
$3/2_1^+ \rightarrow 7/2_1^+$	0,007	0,076	
$5/2_2^+ \rightarrow 7/2_1^+$	0,0095	0,0014	

L'accord avec l'expérience est assez bon ; en particulier la force négligeable du transfert vers le niveau fondamental pour ^{153}Eu et ^{155}Eu est bien reproduite. Pour ^{155}Eu la force est cependant prédite trop haut en énergie et trop divisée.

De nombreux calculs de ce type voient le jour actuellement et une extension, IBFM-2, où on distingue comme dans IBM-2 des bosons de protons et des bosons de neutrons, est de plus en plus utilisée. Nous avons essayé de montrer les potentialités de ces calculs... il est clair qu'il y a aussi des problèmes, en particulier en ce qui concerne les réactions de transfert¹.

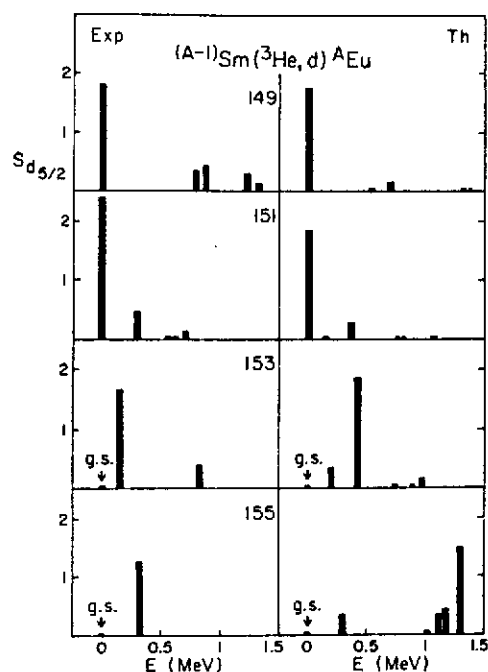


Figure 2 : Comparaison des valeurs, expérimentales et calculées dans le cadre du modèle IBFM, des facteurs spectroscopiques $S_{d5/2}$ pour les réactions $\text{Sm}(^3\text{He}, d)\text{Eu}$.

IV - LA VOIE DES GROUPES

IV.A Symétrie de Bose-Fermi

Il a été montré plus haut que les états des noyaux de A impair forment des représentations du groupe produit $U^B(6) \otimes U^F(\Omega)$. On peut, au lieu de choisir la voie des calculs sur ordinateurs, se poser la question :

"Est-il possible de trouver pour les noyaux de A impair une (ou plusieurs) symétrie(s) dynamique(s)" ?

Une telle symétrie serait appelée symétrie de Bose-Fermi (B-F).

. Rappel : on a une symétrie dynamique quand :

- i) les états du système quantique considéré peuvent être classés au moyen d'un certain groupe G (H a une structure de groupe G).

Ici, G est : $U^B(6) \otimes U^F(\Omega)$.

- ii) H peut être écrit au moyen des seuls opérateurs invariants de Casimir d'une chaîne de sous-groupes de G (les 2 chaînes de sous-groupes, de $U^B(6)$ d'une part, de $U^F(\Omega)$ d'autre part, doivent être combinées de façon à former une chaîne commune unique de sous-groupes agissant à la fois sur les bosons et sur les fermions : $G \supset G' \supset G'' \dots$)

Il n'est pas possible de trouver une telle chaîne dans le cas général. Toutefois F. Iachello a montré^{6,8} que, si on considère un coeur bosonique $O(6)$ et un fermion sur une seule orbite $j = 3/2$, $(U^F(\Omega) \rightarrow U^F(4))$, il est possible de former une chaîne de sous-groupes Bosons-Fermions. En effet :

- pour $U^B(6)$:

$$U^B(6) \supset SO^B(6) \supset SO^B(5) \supset SO^B(3) \supset SO^B(2) \quad (10)$$

(36 géné.) 15 géné. 10 géné. 3 géné. 1 géné.

- pour $U^F(4)$, Flowers⁹ a montré qu'il existe une chaîne de sous-groupes :

$$U^F(4) \supset SU^F(4) \supset Sp^F(4) \supset SU^F(2) \supset SO^F(2) \quad (11)$$

(16 géné.) 15 géné. 10 géné. 3 géné. 1 géné.

Les groupes marqués l'un au-dessus de l'autre (à partir de $SO^B(6)$ et $SU^F(4)$) sont "isomorphes" : à chaque élément de l'un correspond un élément de l'autre et réciproquement. Ces groupes ont donc le même nombre, n , de générateurs. Ceci permet de former n nouveaux générateurs qui seront des combinaisons linéaires 2 à 2 des n anciens, les combinaisons étant choisies de manière à ce que la nouvelle algèbre soit fermée et définisse donc un groupe. Ceci va être montré de façon pratique sur un exemple et nous expliquerons ensuite à quoi peuvent servir les nouveaux groupes ainsi formés.

Les 15 générateurs de $SO^B(6)$ s'écrivent en notation de Racah (couplage à 1 bon moment angulaire λ , projection μ) :

$$\left. \begin{aligned} B_{\mu}^{(\lambda)} &= (d^{\dagger} \times \tilde{d})_{\mu}^{(\lambda)}, \lambda = 1, 3 & 10 \text{ géné.} \\ B_{\mu}^{(2)} &= (s^{\dagger} \times \tilde{d} + d^{\dagger} \times \tilde{s})_{\mu}^{(2)}, \lambda = 2 & 5 \text{ géné.} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

et, de même, les 15 générateurs de $SU^F(4)$ peuvent s'écrire :

$$A_{\mu}^{(\lambda)} = (a^{\dagger} \times \tilde{a})_{\mu}^{(\lambda)}, \lambda = 1, 2, 3 \quad 15 \text{ géné.} \quad (13)$$

Les générateurs $G_{\mu}^{(\lambda)}$, combinaisons linéaires données ci-dessous, des générateurs de ces deux groupes :

$$\left. \begin{aligned} G_{\mu}^{(1)} &= B_{\mu}^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} A_{\mu}^{(1)} & , & \quad 3 \text{ géné.} \\ G_{\mu}^{(2)} &= B_{\mu}^{(2)} + A_{\mu}^{(2)} & , & \quad 5 \text{ géné.} \\ G_{\mu}^{(3)} &= B_{\mu}^{(3)} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_{\mu}^{(3)} & , & \quad 7 \text{ géné.} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

forment aussi une algèbre fermée et sont les générateurs d'un groupe "spinéux"¹⁰, Spin (6), qui est -naturellement- isomorphe à la fois de $SO^B(6)$ et de $SU^F(4)$. Les $G^{(1)}$ et $G^{(3)}$ sont de même les générateurs d'un autre groupe : Spin (5), isomorphe de $SO^B(5)$ et $Sp^F(4)$; les $G^{(1)}$ sont les générateurs du groupe Spin (3), isomorphe de $SO^B(3)$ et $SU^F(2)$ et enfin $G_0^{(1)}$ est le générateur du groupe Spin (2), isomorphe de $SO^B(2)$ et $SO^F(2)$. On a donc :

$$\text{Spin (6)} \supset \text{Spin (5)} \supset \text{Spin (3)} \supset \text{Spin (2)} \quad (15.a)$$

On peut montrer¹⁰ que chacun de ces groupes Spin () est un sous-groupe du produit des deux groupes de départ :

$$\begin{aligned} SO^B(6) \otimes SU^F(4) &\supset \text{Spin (6)} \\ SO^B(5) \otimes Sp^F(4) &\supset \text{Spin (5)}. \\ SO^B(3) \otimes SU^F(2) &\supset \text{Spin (3)} \end{aligned} \quad (15.b)$$

Que représentent ces groupes Spin () et à quoi vont-ils servir ? Il est possible de donner une image relativement claire dans le cas du groupe Spin (3). Dans la chaîne de $U^B(6)$, $SO^B(3)$ est le groupe des rotations à 3 dimensions correspondant au moment "orbital" \vec{L} des bosons (nombre quantique L) et agit sur l'espace ϵ_B des bosons. Dans la chaîne $U^F(4)$, $SU^F(2)$ est de même le groupe des rotations (3 générateurs) correspondant au moment angulaire \vec{j} des fermions (nombre quantique j) et agit sur l'espace ϵ_F des fermions.

Si nous considérons que l'Hamiltonien du système bosons + fermions est $H_0 = H_B + H_F$, l'espace ϵ correspondant est le produit des deux espaces ϵ_B et ϵ_F : $\epsilon = \epsilon_B \otimes \epsilon_F$ et le groupe correspondant est le produit direct $G = U^B(6) \otimes U^F(4)$ qui contient successivement ($G \supset G' \supset G'' \dots$) les autres produits des groupes des chaînes parallèles (10) et (11). Au niveau du produit $SO^B(3) \otimes SU^F(2)$, $SO^B(3)$ agit seulement sur ϵ_B et $SU^F(2)$ agit seulement sur ϵ_F : les groupes sont placés "l'un à côté de l'autre" et décrivent des rotations indépendantes des bosons et des fermions.

Si nous laissons agir l'interaction $V_{B,F}$ entre bosons et fermions, l'Hamiltonien total réaliste $H = H_0 + V_{B,F}$ n'est plus invariant dans les rotations indépendantes des fermions et des bosons, mais il l'est dans les rotations d'ensemble, de moment angulaire $\vec{J} = \vec{L} + \vec{j}$. Nous devons -comme c'était le cas¹ pour IBM.1 avec le groupe $SO^B(3)$ - faire apparaître dans la chaîne le groupe des rotations d'ensemble du système bosons + fermions. Ce groupe est le groupe Spin (3). En contractant dans la fin de la chaîne le produit $SO^B(3) \otimes SU^F(2)$ en Spin (3) :

$$\left. \begin{aligned} U^B(6) \otimes U^F(4) &\supset SO^B(6) \otimes SU^F(4) \supset SO^B(5) \otimes Sp^F(4) \supset \\ &SO^B(3) \otimes SU^F(2) \supset \text{Spin (3)} \supset \text{Spin (2)} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

le couplage bosons + fermions est imposé au niveau du moment angulaire, ce qui correspond à un modèle de couplage faible. Il est clair que si $V_{B,F}$ est compliqué et ne dépend pas seulement des moments angulaires, le couplage effectué ci-dessus est insuffisant. Sans se faire une image aussi précise que dans le cas des groupes des rotations, on comprend facilement que le noyau de A impair sera d'autant mieux décrit (meilleure base) que le couplage bosons + fermions sera imposé le plus en amont possible, ici au niveau du produit des deux premiers groupes iso-

morphes : $SO^B(6)$ et $SU^F(4)$, en introduisant le groupe Spin (6) et ses sous-groupes. On peut finalement écrire la chaîne de sous-groupes définissant la symétrie de Bose-Fermi Spin (6) :

$$U^B(6) \otimes U^F(4) \supset SO^B(6) \otimes SU^F(4) \supset \text{Spin}(6) \supset \text{Spin}(5) \supset \text{Spin}(3) \supset \text{Spin}(2) \quad (17)$$

Les nombres quantiques correspondant aux différents groupes sont indiqués dans le Tableau II.

Tableau II - Sous-groupes et nombres quantiques caractérisant la symétrie de Bose-Fermi Spin (6).

Groupe	Nombres quantiques
$U^B(6)$	N : nb. de bosons
$U^F(4)$	M : nb. de fermions
$SO^B(6)$	Σ
Spin (6)	$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$
Spin (5)	(τ_1, τ_2)
Spin (3)	J
Spin (2)	M_J

L'Hamiltonien H peut être écrit en fonction des seuls opérateurs de Casimir de la chaîne complète de sous-groupes (17), mais ceci conduit à prendre certains paramètres égaux à 0 (ou à des valeurs bien définies) dans l'Hamiltonien général (5), ce qui implique en particulier une forme spécifique pour V_{BF} . Il est donc clair que la symétrie de Bose-Fermi ne peut être réalisée que dans des cas limites très particuliers, donc en principe dans des zones très étroites et peu nombreuses de la Table des Eléments. Il en est de même pour la supersymétrie dont nous allons parler dans la section IV.B.

Les énergies des niveaux d'un noyau de A impair peuvent maintenant s'écrire de façon très simple⁸, en fonction de 3 paramètres A , B et C et des nombres quantiques du Tableau II, sous la forme :

$$E(N, M, \Sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, v_A, J, M) = -\frac{A}{4} [\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2) + \sigma_3^2] + \frac{B}{6} [\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + C [J(J + 1)] \quad (18)$$

où les crochets sont les valeurs propres des opérateurs de Casimir des groupes Spin (6), Spin (5) et Spin (3). Il existe de même des formules analytiques simples⁸ pour les autres observables : $B(E2)$, probabilités de transfert de particules...

La formule (18) peut être considérée comme une généralisation, englobant les noyaux de A impair particuliers considérés ici, de la formule obtenue¹ pour un noyau pair-pair dans la limite O(6) de IBM.1 :

$$E = -\frac{A}{4} \sigma(\sigma + 4) + \frac{B}{6} \tau(\tau + 4) + CL(L + 1) \quad (19)$$

On peut vérifier que pour $M = 0$, en prenant⁸ les nombres quantiques σ_2 , σ_3 et τ_2 égaux à 0, la formule (18) se réduit bien à la formule ci-dessus. (Si on considère un noyau de A impair avec un seul fermion célibataire, $M = 1$, on a⁸ : $\sigma_2 = \sigma_3 = \tau_2 = 1/2$). Ceci donne l'idée -puisque la même formule peut être appliquée à la fois aux noyaux pair-pairs et aux noyaux de A impair- qu'il serait peut-être possible de trouver une description unifiée pour les noyaux pair-pairs (spectres bosoniques) et les noyaux de A impair (spectres fermioniques).

IV.B Supersymétrie

La symétrie de Bose-Fermi décrit chaque noyau individuellement. Il est possible de rechercher une unification plus poussée dans laquelle les noyaux pair-pairs et de A impair seraient décrits simultanément. Ceci est réalisé en incluant les groupes de bosons et de fermions G^B , G^F , à l'intérieur d'un groupe plus étendu qui contient, dans une seule représentation irréductible, à la fois les spectres bosoniques et les spectres fermioniques. Ce groupe étendu ne peut pas être un groupe de Lie normal, mais un supergroupe ou groupe de Lie "gradé". La symétrie correspondante est appelée "supersymétrie"[†]. Dans le cas discuté ci-dessus, le supergroupe^{11,12} est :

$$U(6/4) \supset U^B(6) \otimes U^F(4) \quad (20)$$

Les nombres quantiques sont les mêmes que pour la symétrie de Bose-Fermi, mais il apparaît un nombre quantique supplémentaire, \mathcal{N} , qui est le nombre total de bosons et de fermions. Il est donc clair que N et M , qui précédemment étaient fixés indépendamment, ne sont plus libres mais sont liés par $\mathcal{N} = N + M$ avec $M < 4$. Une différence majeure entre la symétrie de Bose-Fermi discutée dans la Section précédente et la supersymétrie est que, dans le premier cas les noyaux pouvaient être traités séparément, c'est à dire que les paramètres A , B , C décrivant le spectre d'énergie pouvaient avoir des valeurs différentes pour chaque noyau, alors que dans le second cas, ces paramètres doivent être les mêmes pour tous les noyaux à l'intérieur d'un même supermultiplet. A titre d'exemple, les noyaux formant un supermultiplet avec $\mathcal{N} = 8$ sont indiqués dans le Tableau III pour les noyaux avec 116 neutrons (5 bosons de neutrons). Les divers supermultiplets correspondant à 116 et 118 neutrons sont représentés dans la Figure 3.

[†] Ce nom a été suggéré par F. Iachello en raison de l'analogie avec la supersymétrie proposée en physique des particules et de l'utilisation des supergroupes (voir section I.B.3). Il faut toutefois toujours garder à l'esprit qu'en physique nucléaire les bosons du modèle IBM ne sont pas des particules fondamentales, mais consistent au niveau microscopique en paires corrélées de fermions.

Tableau III - Caractéristiques du supermultiplet $N^* = 8$, avec 116 neutrons. 2 q - p indique un état avec deux quasiparticules, etc.

N	M	Noyau
8	0	^{192}Os
6	2	$^{194}\text{Pt}(2 \text{ q-p})$
4	4	$^{196}\text{Hg}(4 \text{ q-p})$
7	1	^{193}Ir
5	3	$^{195}\text{Au}(3 \text{ q-p})$

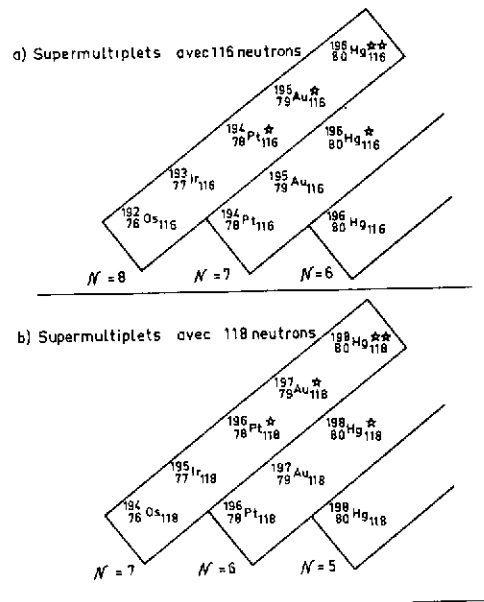


Figure 3 : Supermultiplets correspondant à 116 et 118 neutrons. Dans le cas où $M = 2, 3$ ou 4 , les noyaux correspondants se trouvent, non dans l'état fondamental, mais dans des états excités à deux, trois (une étoile dans la figure) ou quatre quasi-particules (deux étoiles).

IV.C Tests de la symétrie de Bose-Fermi et de la supersymétrie

Les modèles décrits ci-dessus ont été testés en détails dans les noyaux de la région des Pt. Dans cette région les noyaux pair-pairs sont bien décrits par la symétrie $O(6)$ et, dans les noyaux de Z impair, le proton occupe une orbite relativement isolée avec $j = 3/2$.

IV.C.1 Spectres d'énergie

Il apparaît que les spectres d'énergie de plusieurs paires de noyaux de cette région peuvent en fait être décrits par la formule analytique (18). Un exemple est donné dans la Figure 4. Un bon test de la supersymétrie est l'égalité des paramètres A, B, C de la formule d'énergie pour les membres, pair et impair, d'un même supermultiplet. Ce test, effectué récemment, montre⁸ qu'au moins dix noyaux de la région Os, Ir, Pt, Au (cinq paires de noyaux adjacents) sont raisonnablement décrits par la formule (18), avec les mêmes paramètres. Des tests quantitatifs, effectués pour les supermultiplets $N = 9$ et $N = 8$, montrent que l'écart par rapport à la supersymétrie, défini par :

$$R_E = \frac{\sum_i |E_i^{th} - E_i^{exp}|}{\sum_i E_i^{exp}},$$

est inférieur à 20 % dans ces cas.

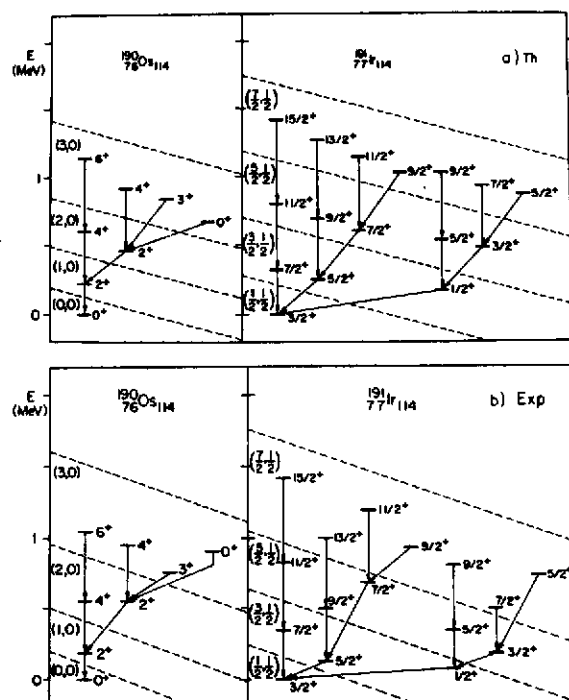


Figure 4 : Comparaison des spectres expérimentaux avec ceux calculés en utilisant les formules analytiques de la supersymétrie :

- a) Spectres théoriques,
- b) Spectres expérimentaux.

Les nombres quantiques indiqués entre parenthèses sont τ_1, τ_2 .

IV.C.2 Probabilités des transitions électromagnétiques

Un test, en principe plus fin, est fourni par les probabilités des transitions électromagnétiques. Des études effectuées dans la même région montrent que les règles de sélection de la symétrie de Bose-Fermi sont raisonnablement respectées. Nous ne considérerons ici que les transitions E2. L'opérateur généralement utilisé dans ce cas (par analogie avec l'opérateur : $T(E2) = \alpha_2 \cdot B_{\mu}^{(2)}$ utilisé¹ dans le cas de la limite 0 (6) de IBM.1, où $B_{\mu}^{(2)}$ est un générateur du groupe SO (6)) est l'opérateur :

$$T(E2) = \alpha_2 \cdot G_{\mu}^{(2)} \quad (21)$$

où $G_{\mu}^{(2)}$ est un des générateurs du groupe Spin (6).

- . Le Tableau IV montre la comparaison des B(E2) expérimentaux et théoriques pour la paire $^{193}\text{Ir} - ^{194}\text{Pt}$. Il s'agit d'une comparaison qualitative, mais l'accord d'ensemble est assez satisfaisant : les transitions prévues fortes sont globalement observées fortes, les transitions interdites sont faibles expérimentalement. Il faut remarquer qu'un schéma de couplage faible prévoit une transition relativement importante pour le niveau $3/2_2^+$.

Tableau IV - Comparaison des B(E2 \uparrow) expérimentaux et théoriques (normalisés à 1,0 pour la transition correspondant au niveau 2_1^+), pour les premiers niveaux des noyaux de la paire $^{193}\text{Ir} - ^{194}\text{Pt}$.

	J^{π} final	Modèle	Expérience
^{194}Pt	2_1^+	1,0	1,0
	2_2^+	<u>0</u>	0,005
^{193}Ir	$1/2_1^+$	0,11	0,07
	$5/2_1^+$	0,33	0,44
	$3/2_2^+$	<u>0</u>	0,05
	$7/2_1^+$	0,44	0,3
	$7/2_2^+$	<u>0</u>	0,05

- De façon plus quantitative, il est possible de définir une mesure de l'écart par rapport à la supersymétrie par :

$$R_Y = \frac{\sum_i |B(E2)_i^{th} - B(E2)_i^{exp}|}{\sum_i B(E2)_i^{exp}}.$$

Cet écart est de l'ordre de 20 % pour l'ensemble des B(E2) du Tableau IV et du même ordre pour les 12 B(E2) de la paire $^{192}\text{Os} - ^{193}\text{Ir}$. Dans certains cas moins favorables, l'écart peut atteindre¹¹ 40 %.

- Une analyse¹¹ ne considérant, dans le noyau pair-pair que la transition $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$, et dans le noyau de A impair que les transitions des niveaux $1/2_1^+$, $5/2_1^+$, $7/2_1^+$ vers le niveau fondamental $3/2_1^+$, a montré (voir Figure 5) que le paramètre α_2 est le même pour les noyaux pair-pairs et de A impair. Ceci est un test de la supersymétrie, qui apparaît comme satisfait à mieux que 5 %. Il faut remarquer que ce test va plus loin, puisqu'il montre que le paramètre α_2 est le même pour toute la région considérée, de ^{190}Os à ^{198}Hg .

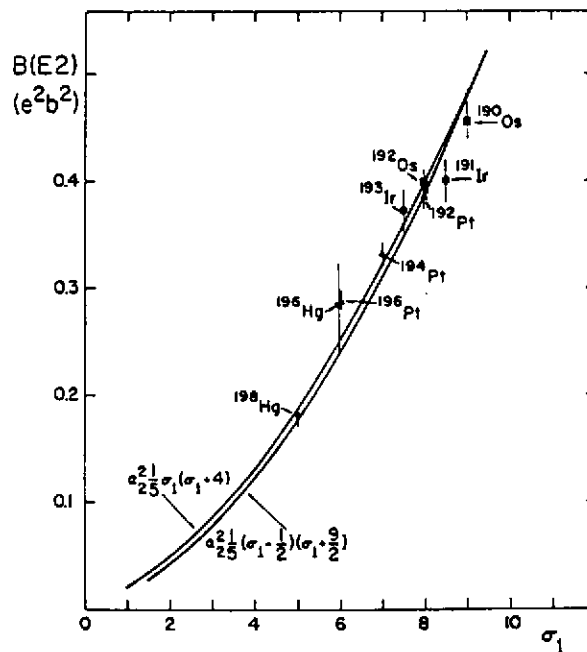


Figure 5 : Valeurs absolues des B(E2) dans la région Os-Hg en fonction du nombre quantique σ_1 de Spin (6). Les lignes sont les prévisions théoriques, avec le même paramètre α_2 , pour les noyaux pair-pairs (au-dessus) et de A impair (au-dessous). Les points sont les valeurs expérimentales (voir Réf. 11 pour plus de détails).

IV.C.3 Transferts de particules

D'autres tests sont fournis par les intensités des réactions de transfert de 2 nucléons. Ce sont des tests indirects car l'opérateur approprié relie des noyaux qui n'appartiennent pas à un même supermultiplet. Les formules¹ conduisent à prévoir des intensités égales, à quelques % près, pour les réactions peuplant les niveaux fondamentaux des noyaux pair-pairs et de A impair ayant le même nombre de neutrons. L'égalité expérimentale des intensités fondamental → fondamental pour des paires adjacentes, par exemple $^{194}\text{Pt}(t,p)^{196}\text{Pt}$ et $^{193}\text{Ir}(t,p)^{195}\text{Ir}$, est un test¹³ de la symétrie de Bose-Fermi. C'est une condition nécessaire, plutôt que suffisante, pour l'existence de la symétrie, car le modèle de couplage faible prévoit le même résultat.

En principe, un des meilleurs tests de la symétrie de Bose-Fermi et de la supersymétrie devrait être fourni par les intensités des réactions de transfert d'un nucléon. Le test suppose que ces réactions procèdent essentiellement par un mécanisme direct. Une discussion des mécanismes de réactions étant en dehors du cadre du présent exposé, nous ferons simplement, sans la discuter, cette hypothèse raisonnable¹³ dans la suite.

- Réactions pair-pair → A impair -

Dans le cadre des modèles discutés dans ce chapitre, il est admis que le noyau pair-pair est décrit par la limite $O(6)$ du modèle IBM.1 et que le noyau de A impair est obtenu en couplant à ce coeur un (ou des) nucléon(s) dans l'orbite $j = 3/2$. Le test se décompose donc en 2 parties :

- vérifier que les transferts du noyau pair-pair vers les niveaux du noyau de A impair décrits par les modèles Spin (6) et U (6/4) sont : $\ell = 2$, $j = 3/2$
- vérifier, pour ces transferts, que les règles de sélection et les rapports d'embranchement sont en accord avec les prévisions théoriques.

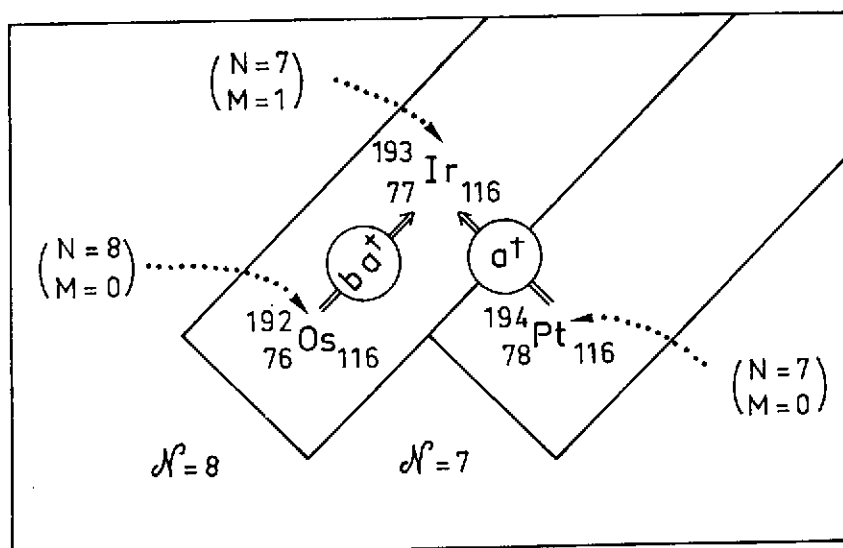


Figure 6 : Représentation schématique des opérateurs de transfert les plus simples pour les réactions aboutissant aux niveaux de ^{193}Ir .

Les opérateurs de transfert les plus simples possibles sont illustrés de façon évidente dans la Figure 6 pour les réactions aboutissant aux niveaux de ^{193}Ir (c'est un agrandissement d'une partie de la Figure 3.a, complétée par les valeurs de N et M du Tableau III). En pratique, on utilise :

$$\left. \begin{aligned} T_{S.S} &= \theta \cdot (b \times a^\dagger)_\mu^{(3/2)} \\ T_{B.F} &= \xi \cdot a^\dagger \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

θ et ξ étant des paramètres, $T_{S.S}$ agissant à l'intérieur d'un supermultiplet, $T_{B.F}$ entre deux supermultiplets différents (voir Fig. 6). Ces opérateurs ont des règles de sélection reliées à leur caractère tensoriel⁸ par rapport aux groupes Spin (6) et Spin (5) :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma &= \pm 1/2 \\ \Delta\tau &= \pm 1/2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Les interdictions résultant des règles (23) et les rapports d'embranchement calculés dans le cadre des modèles discutés ici sont résumés dans la Figure 7. Les résultats

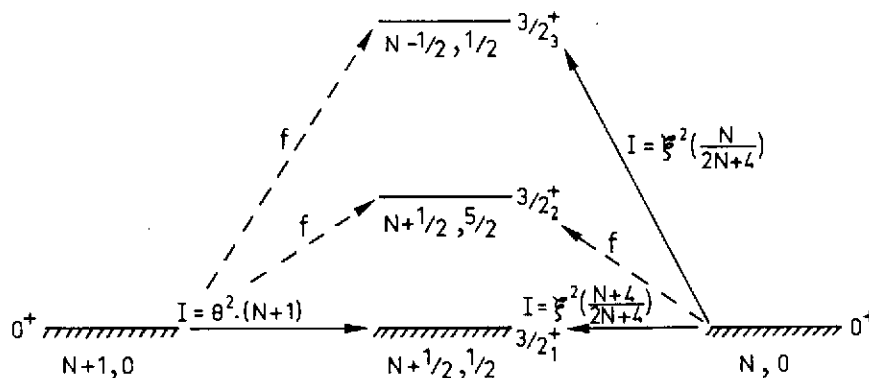


Figure 7 : Règles de sélection et rapports d'embranchement pour les réactions illustrées dans la Fig. 6 (et plus généralement pour les réactions pair-pair \rightarrow A impair). Sous chaque niveau sont indiquées les valeurs de σ , τ .

expérimentaux correspondants (voir Réf. 1 et 13 pour plus de détails et des références) sont illustrés dans la Figure 8. Ils sont en tous points conformes aux prévisions et constituent une remarquable confirmation du modèle Spin (6), et même du modèle U (6/4) pour la réaction $^{192}\text{Os} + ^{193}\text{Ir}$ à l'intérieur d'un même supermultiplet. On peut définir un écart par rapport aux modèles par :

$$R_S = \sum_i |s_i^{\text{exp.}} - s_i^{\text{th.}}| / \sum_i s_i^{\text{exp.}}$$

pour les réactions de pick-up (pour les réactions de stripping on remplace le facteur spectroscopique S par la force G).

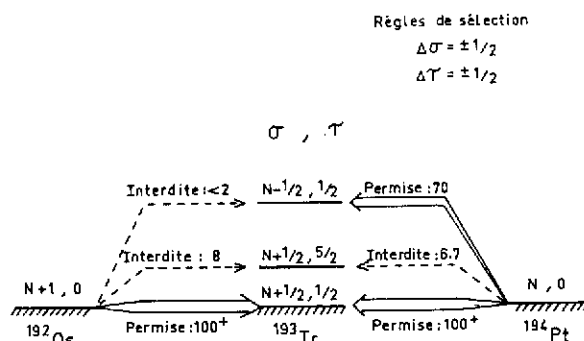


Figure 8 : Vérification expérimentale de la validité des règles de la symétrie de Bose-Fermi et de la supersymétrie dans les réactions aboutissant aux niveaux $J^\pi = 3/2^+$ de ^{193}Ir . La classe (permise ou interdite) et l'intensité expérimentale de la transition sont indiquées à côté des flèches. Les intensités ont été normalisées à 100 pour les transitions aboutissant à l'état fondamental.

Pour la réaction $^{192}\text{Os} \rightarrow ^{193}\text{Ir}$: $R_S \approx 9,0 \%$

Pour la réaction $^{194}\text{Pt} \rightarrow ^{193}\text{Ir}$: $R_S \approx 7,5 \%$.

C'est le meilleur exemple connu. Pour d'autres cas étudiés, R_S est de l'ordre de 40 %. La règle de sélection : $\ell = 2, j = 3/2$ (Test a) est assez généralement violée, les niveaux $1/2_1^+$ et $5/2_1^+$ étant peuplés de façon appréciable, même dans l'exemple discuté ci-dessus ($\approx 30 \%$ de la force correspondant au niveau fondamental).

- Réactions A impair \rightarrow pair-pair -

Ces réactions ont été principalement étudiées à Orsay¹³. Les modèles prévoient que seuls les niveaux 0_1^+ et 2_1^+ doivent être peuplés. La première réaction étudiée, $^{193}\text{Ir} \rightarrow ^{194}\text{Pt}$, est illustrée dans la Figure 9. La forte population des niveaux 2_2^+ et 0_2^+ est une claire violation des règles de sélection des modèles ($R_S = 44 \%$). Les autres cas étudiés montrent des violations généralement du même ordre.

IV.C.4 Sommaire

La symétrie de Bose-Fermi Spin (6) et le modèle de supersymétrie U (6/4) semblent fournir une description raisonnable (violations de 20 à 40 % en moyenne, plus faibles dans quelques cas) des énergies et des probabilités des transitions électromagnétiques pour un certain nombre de noyaux de la région Os, Ir, Pt, Au. Des violations plus importantes sont observées dans certains cas pour les réactions de transfert d'un nucléon (niveaux 2_2^+ des noyaux pair-pairs en particulier). Il y a aussi des difficultés en ce qui concerne les transitions M1.

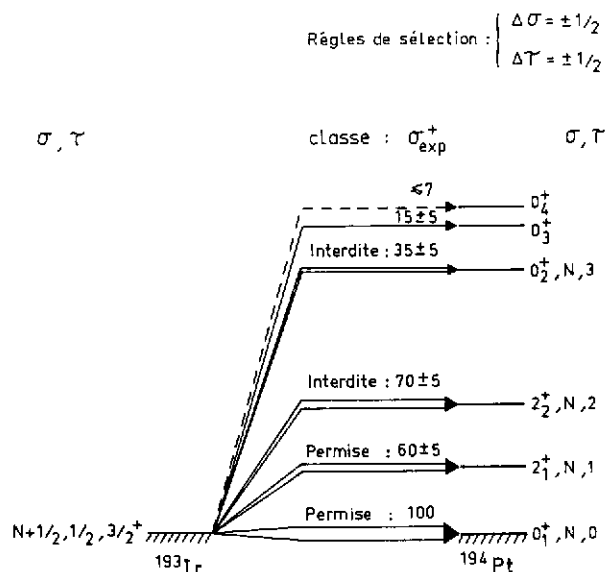


Figure 9 : Mise en évidence expérimentale d'une violation importante des règles de sélection de la symétrie de Bose-Fermi dans la réaction $^{193}\text{Ir}(^3\text{He}, d)^{194}\text{Pt}$. L'intensité a été normalisée à 100 pour la transition aboutissant à l'état fondamental.

Pour expliquer les difficultés rencontrées, en particulier dans le cas des réactions de transfert, deux raisons principales ont été suggérées :

- .i) Il n'est pas raisonnable de considérer une seule orbite pour les fermions, les modèles devraient être étendus à $j = 1/2, 3/2, 5/2$. Ceci a été fait et sera discuté brièvement dans la suite.
- .ii) L'opérateur (de transfert ou autre) est trop simple et devrait être amélioré..... jusqu'ici, ceci est demeuré un souhait, non encore réalisé, mais répété avec conviction dans toutes les conférences traitant du sujet. (Dernière en date : "Nuclear Structure, Reactions and Symmetries", Dubrovnik, juin 86).

V - MODELES PLUS RECENTS

La supersymétrie $U(6/4)$ a été proposée en 1980 et les premiers tests expérimentaux datent de 1981... Ce modèle a été décrit de façon un peu détaillée ici parce qu'il est le premier et le plus simple et qu'il permet de faire comprendre la notion de supersymétrie en physique nucléaire. D'autres modèles ont été développés depuis et continuent à se développer. Une revue récente de ces modèles, nouveaux ou extensions des modèles anciens, peut être trouvée dans la Référence 13. Nous ne traiterons ici -et ce assez brièvement- que des trois modèles (ou extensions) les plus importants.

V.A Le modèle "multi-j" U(6/12)

Ce modèle¹⁴ présente deux avantages essentiels par rapport au modèle U(6/4) :

- a) - Il n'est pas limité au coeur O(6), mais peut utiliser des coeurs correspondants aux trois limites O(6), U(5), SU(3), du modèle IBM.1.
- b) - Il n'est pas limité à l'orbite $j = 3/2$ mais permet d'élargir l'espace accessible aux fermions.

On procède de la façon suivante : $j, j', j'' \dots$ étant les moments angulaires des orbites individuelles sur lesquelles peuvent se trouver les fermions, il est toujours possible de décomposer chacun de ces moments en un pseudo-spin $s = 1/2$ et un pseudo-moment orbital k entier (qui ne coïncide pas nécessairement avec le vrai moment orbital). Si la, ou les diverses valeurs de k se trouvent appartenir à une représentation irréductible du groupe G^B (ou de l'un de ses sous-groupes), il est alors possible de combiner les groupes de fermions G^F et de bosons G^B dans un cadre théorique unique.

V.A.1 Coeur O(6), particules sur les orbites $j = 1/2, 3/2, 5/2$

Ce cas a été le premier traité et servira à illustrer la procédure utilisée. On peut dire que la décomposition pour $j = 1/2, 3/2, 5/2$ aboutit à $k = 0, 2$ et que ces valeurs appartiennent à une représentation irréductible unique de U(6) et O(6). On peut aussi écrire les deux chaînes de sous-groupes comme nous l'avons fait dans le cas de $U^B(6) \otimes U^F(4)$. Le groupe décrivant les fermions sur les orbites $j = 1/2, 3/2, 5/2$ est $U^F(12)$ et la décomposition décrite plus haut peut s'écrire :

$$U^F(12) \supset U^F(6) \otimes SU^F(2).$$

Alors :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \boxed{\begin{array}{c} U^B(6) \\ \otimes \\ U^F(6) \end{array}} & \supset & \boxed{\begin{array}{c} SO^B(6) \\ \otimes \\ SO^F(6) \end{array}} & \supset & \boxed{\begin{array}{c} SO^B(5) \\ \otimes \\ SO^F(5) \end{array}} & \supset & \boxed{\begin{array}{c} SO^B(3) \\ \otimes \\ SO^F(3) \end{array}} & (24) \\
 \otimes SU^F(2) & & \otimes SU^F(2) & & \otimes SU^F(2) & & \otimes SU^F(2)
 \end{array}$$

Les groupes placés dans les boîtes, l'un au-dessus de l'autre, sont clairement isomorphes (c'est la clé de la méthode) et leur produit direct peut être "contracté" en un groupe $B + F$, isomorphe des groupes de départ, par exemple :

$$SO^B(3) \otimes SO^F(3) \supset SO^{B+F}(3),$$

les générateurs de ces groupes B + F étant construits de façon analogue à celle décrite pour les groupes Spin. La chaîne ainsi obtenue peut alors être insérée dans le supergroupe correspondant U (6/12). On a alors la chaîne de sous-groupes caractérisant le modèle Bose-Fermi $SO^{B+F}(6)$ et la supersymétrie U (6/12) avec coeur 0 (6) :

$$\left. \begin{aligned} U(6/12) \supset U^B(6) \otimes U^F(12) \supset U^B(6) \otimes U^F(6) \otimes SU^F(2) \supset U^{B+F}(6) \otimes SU^F(2) \supset \\ SO^{B+F}(6) \otimes SU^F(2) \supset SO^{B+F}(5) \otimes SU^F(2) \supset SO^{B+F}(3) \otimes SU^F(2) \supset \\ Spin(3) \supset Spin(2) \end{aligned} \right\} (25)$$

Les nombres quantiques correspondant¹⁴ aux différents groupes sont indiqués dans le Tableau V.

Tableau V - Sous-groupes et nombres quantiques caractérisant la supersymétrie U (6/12) correspondant à la limite 0 (6) de IBM.1.

Groupe	Nombres quantiques
U (6/12)	\mathcal{N}
$U^B(6)$	N
$U^F(12)$	M
$U^{B+F}(6)$	N_1, N_2
$O^{B+F}(6)$	$\sigma_1, \sigma_2, (\sigma_3 = 0)$
$O^{B+F}(5)$	τ_1, τ_2
$O^{B+F}(3)$	\mathcal{L}
$SU^F(2)$	Δ
Spin (3)	J
Spin (2)	M_J

\mathcal{L} est le moment angulaire du système résultant du couplage du moment angulaire L des bosons, et du pseudo-moment orbital $\tilde{\mathcal{L}}$ des fermions : $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{L} + \tilde{\mathcal{L}}$, Δ est le pseudo-spin et J le moment angulaire total :

$$\vec{J} = \vec{\mathcal{L}} + \vec{\Delta}.$$

Il est possible d'obtenir des formules analytiques pour les énergies, les probabilités des transitions électromagnétiques, etc... Les énergies d'excitation sont données par :

$$\begin{aligned}
 E = & A [N_1(N_1 + 5) + N_2(N_2 + 3)] + B [\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2)] \\
 & + C [\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + D [L(L + 1)] \\
 & + E [J(J + 1)]
 \end{aligned}
 \quad (26)$$

en fonction de 5 paramètres A, B, C, D, E et des nombres quantiques du Tableau V.

La symétrie de Bose-Fermi correspondant à cette supersymétrie a été appliquée à l'étude des isotopes impairs de Pt. Dans ces isotopes le neutron impair occupe les orbites $P_{1/2}$, $P_{3/2}$, $F_{5/2}$. La Figure 10 montre une comparaison entre le spectre expérimental du ^{195}Pt et celui obtenu en utilisant la formule d'énergie (26) correspondant à la chaîne (25).

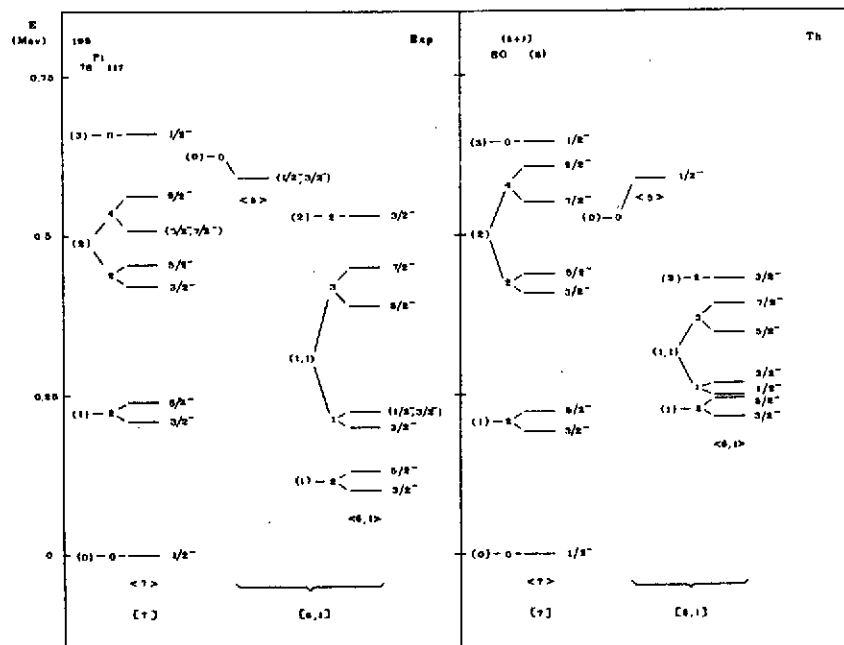
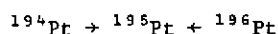


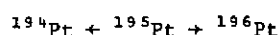
Figure 10 : Comparaison¹⁴ du spectre expérimental du ^{195}Pt avec celui calculé au moyen du modèle multi-j, avec un coeur 0 (6) couplé à une particule dans les orbites $j = 1/2, 3/2, 5/2$. Les niveaux sont étiquetés, à gauche par les nombres quantiques τ_1, τ_2 et, sous chaque bande, par les nombres quantiques $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (0 si non indiqué).

De façon plus quantitative, $R_E \approx 12\%$ pour 15 niveaux (5 paramètres).

Le schéma de supersymétrie a également été testé de façon détaillée¹³ au moyen des réactions de transfert. Pour l'ensemble des réactions : pair-pair \rightarrow A impair :



On obtient $R_S \approx 16\%$ pour 22 transitions. (Il faut remarquer que les valeurs théoriques dépendent ici dans chaque cas considéré de 3 paramètres, reliés aux probabilités d'occupation des 3 orbites considérées, alors que les résultats de U (6/4) ne dépendaient que d'un paramètre). La situation est moins bonne pour les réactions : A impair \rightarrow pair-pair :



où on obtient $R_S = 33\%$ pour 8 transitions (l'écart provenant pour une part importante de la forte population du niveau 2_2^+ : $R_S \approx 20\%$ si on néglige le désaccord pour ce niveau).

V.A.2 Coeur U(5), mêmes orbites

Le modèle Bose-Fermi $U^{B+F}(5)$, pour lequel nous ne donnerons ici ni chaîne de sous-groupes, ni formules analytiques (voir la Réf. 13) a été appliqué aux schémas de niveaux des noyaux impairs de Hg ($193 < A < 199$). Des travaux effectués à Orsay en réactions de transfert ont montré¹³ :

- a) - que les noyaux pair-pair sont raisonnablement décrits par la limite U(5)
- b) - que le meilleur candidat de A impair pour une symétrie Bose-Fermi est ^{197}Hg , avec $R_S < 22\%$ pour 5 transitions dans la réaction $^{198}\text{Hg}(p,d)^{197}\text{Hg}$.

V.A.3 Coeur SU(3) - Mêmes orbites

Les noyaux pair-pairs déformés sont bien décrits par la limite SU(3). Parmi les noyaux de A impair de cette région, le meilleur candidat pour la symétrie Bose-Fermi $SU^{B+F}(3)$ est ^{185}W .

V.A.4 Conclusion concernant U(6/12)

Dans le sens où il agrandit l'espace accessible aux fermions et où il permet de traiter les trois coeurs de IBM.1 avec succès, le modèle U(6/12) est une amélioration du modèle U(6/4). Dans la région des Pt, où le modèle U(6/4) avait déjà été utilisé, U(6/12) donne un bon accord en ce qui concerne les énergies des niveaux des noyaux de A impair et un accord acceptable pour les réactions de transfert aboutissant au ^{195}Pt . Toutefois, il continue à y avoir des difficultés dans le cas des réactions A impair \rightarrow pair-pair.

V.B Extension de la supersymétrie aux noyaux impair-impairs

Si le coeur pair-pair n'est plus décrit par le modèle IBM.1, mais par le modèle IBM.2, où les degrés de liberté des protons et des neutrons sont considérés séparément, le groupe $U^B(6)$ est remplacé par :

$$U^B(6) \rightarrow U^B_V(6) \otimes U^B_\pi(6) \quad (27)$$

De même, il est possible d'étendre de façon naturelle la notion de supersymétrie aux noyaux pairs, de A impair (impairs en proton : isotones et impairs en neutron : isotopes) et aux noyaux impair-impairs, l'ensemble étant décrit par le produit de deux supergroupes :

$$U_V(6/12) \otimes U_\pi(6/4) \quad (28)$$

On peut montrer¹⁵ que dans le cas d'un coeur "0 (6)" (on retrouve¹ dans IBM.2 les symétries de IBM.1) pour les bosons, la chaîne de sous-groupes, un peu simplifiée ici, se présente comme

$$\begin{aligned} U_V(6/12) \otimes U_\pi(6/4) &\supset U_V^F(12) \otimes U_V^B(6) \otimes U_\pi^B(6) \otimes U_\pi^F(4) \supset \\ &SU_V^F(2) \otimes U_V^F(6) \otimes U_{V+\pi}^B(6) \otimes SU_\pi^F(4) \supset SU_V^F(2) \otimes U_{V+\pi}^{B+F}(6) \otimes SU_\pi^F(4) \\ &\supset SU_V^F(2) \otimes O_{V+\pi}^{B+F}(6) \otimes SU_\pi^F(4) \supset SU_V^F(2) \otimes O_{V+\pi}^{B+F}(6) \\ &\supset SU_V^F(2) \otimes O_{V+\pi}^{B+F}(5) \supset SU_V^F(2) \otimes O_{V+\pi}^{B+F}(3) \\ &\supset Spin(3) \end{aligned} \quad (29)$$

Nous n'avons donné cette chaîne que pour montrer la complexité accrue due au fait que les bosons sont séparés en deux classes : les bosons π et les bosons V . Cependant la formule donnant les énergies des niveaux ne dépend que de six paramètres.

Dans cette supersymétrie étendue, un supermultiplet est en fait un "quartet" contenant : un noyau pait-pair, les 2 noyaux de A impair adjacents et le noyau impair-impair. Le quartet proposé dans le travail original¹⁵ est indiqué dans la Figure 11. Un autre quartet a été proposé dans la Réf. 13.

197 Au 79 118	198 Au 79 119
196 Pt 78 118	197 Pt 78 119

Figure 11 : Quartet de noyaux proposés¹⁵ comme bons candidats pour la supersymétrie étendue aux noyaux impair-impairs : $U_V(6/12) \otimes U_\pi(6/4)$.

Cette extension unificatrice de la supersymétrie, élégante et séduisante, est très récente et les tests expérimentaux ont à peine commencé. Les premiers¹⁶ apparaissent comme encourageants. On peut envisager une extension plus générale sous la forme : $U_V(6/12) \otimes U_\pi(6/12)$, qui élargirait l'espace des protons aux trois orbites $j = 1/2, 3/2, 5/2$.

V.C Extension de la notion même de supersymétrie (en guise de conclusion)

La supersymétrie $U(6/4)$, puis ses extensions $U(6/12)$, puis $U_V(6/12) \otimes U_\pi(6/4)$, ont toujours été liées très étroitement à l'existence de symétries dynamiques et de chaînes de sous-groupes. Ceci a limité leurs applications à des régions peu nombreuses et étroites de la Table des Eléments. (Ceci a été souligné au Chapitre IV, fin de la section IV.A). La très grande majorité des noyaux pair-pairs de masses moyennes et lourdes -qui sont des noyaux de transition intermédiaires entre les limites de IBM.1- et des noyaux impairs de ces régions n'ont pu, jusqu'à présent, être traités dans ce cadre.

Il a été suggéré très récemment¹⁶ que la validité de la notion de supersymétrie peut être considérée comme indépendante de la forme particulière de l'Hamiltonien IBM utilisé pour la description du noyau pair-pair, donc de la réalisation d'une symétrie dynamique particulière.

L'Hamiltonien IBM le plus général peut s'écrire¹⁷, en fonction des opérateurs de Casimir $C_n(G)$ des divers sous-groupes considérés¹ dans la chaîne $U^B(6)$, sous la forme ($n = 1$: linéaire, $n = 2$: quadratique) :

$$H = k_1 C_1(U^B(6)) + k_2 C_2(U^B(6)) + k_3 C_1(U^B(5)) + k_4 C_2(U^B(5)) + k_5 C_2(O^B(6)) + k_6 C_2(SU^B(3)) + k_7 C_2(O^B(5)) + k_8 C_2(O^B(3)) \quad (30)$$

Si nous considérons, comme dans le modèle multi- j , que l'espace accessible aux fermions consiste en l'ensemble des trois orbites $j = 1/2, 3/2, 5/2$, la chaîne commune de groupes pour le noyau de A impair est :

$$\left. \begin{aligned} U^B(6) \otimes U^F(12) &\supset U^B(6) \otimes U^F(6) \otimes SU^F(2) \\ &\supset U^{B+F}(6) \otimes SU^F(2) \supset \left\{ \begin{array}{l} SO^{B+F}(6) \otimes SU^F(2) \dots \\ SU^{B+F}(3) \otimes SU^F(2) \dots \\ U^{B+F}(5) \otimes SU^F(2) \dots \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

qui se divise, comme dans le cas des noyaux pair-pairs, en 3 chaînes de sous-groupes.... De façon tout à fait analogue à ce qui a été fait pour le noyau pair-pair (Eq. 30), on peut écrire l'Hamiltonien le plus général pour le noyau de A impair en utilisant tous les opérateurs de Casimir des chaînes indiquées ci-dessus :

$$\left. \begin{aligned} H = &k'_1 C_1(U^{B+F}(6)) + k'_2 C_2(U^{B+F}(6)) + k'_3 C_1(U^{B+F}(5)) \\ &+ k'_4 C_2(U^{B+F}(5)) + k'_5 C_2(O^{B+F}(6)) + k'_6 C_2(SU^{B+F}(3)) \\ &+ k'_7 C_2(O^{B+F}(5)) + k'_8 C_2(O^{B+F}(3)) + k'_9 C_2(\text{Spin}(3)) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(la forme précise des opérateurs de Casimir peut être trouvée dans la Réf. 14 : Van Isacker et al.). La forme des Hamiltoniens (30) et (32) est très semblable (comme c'était le cas pour les Hamiltoniens (18) et (19)...) et ceci conduit à l'idée d'une supersymétrie générale qui impose alors des relations simples entre les paramètres :

$$\begin{aligned} k_i &= k'_i \quad (i = 1 \text{ à } 7) \\ k_8 &= k'_8 + k'_9 \end{aligned} \quad (33)$$

Cette supersymétrie générale, qui inclut le groupe $U^B(6) \otimes U^F(12)$ à l'intérieur du supergroupe $U(6/12)$, ne suppose pas que les noyaux pair-pair et de A impair, soient décrits chacun par une chaîne particulière de sous-groupes. L'existence d'une supersymétrie est ainsi déconnectée de l'existence d'une symétrie dynamique particulière et la supersymétrie peut donc s'appliquer de façon générale aux noyaux de transition.

Cette présentation est évidemment très schématique et les tests expérimentaux à leur début, mais l'idée est séduisante car le modèle survolé ci-dessus (même si son utilisation pratique doit être plus compliquée et le nombre des paramètres plus grand) inclut les autres supersymétries décrites dans cet exposé comme des exemples particuliers et limités d'un phénomène qui pourrait être plus général.

Une symétrie, même brisée, peut être belle.

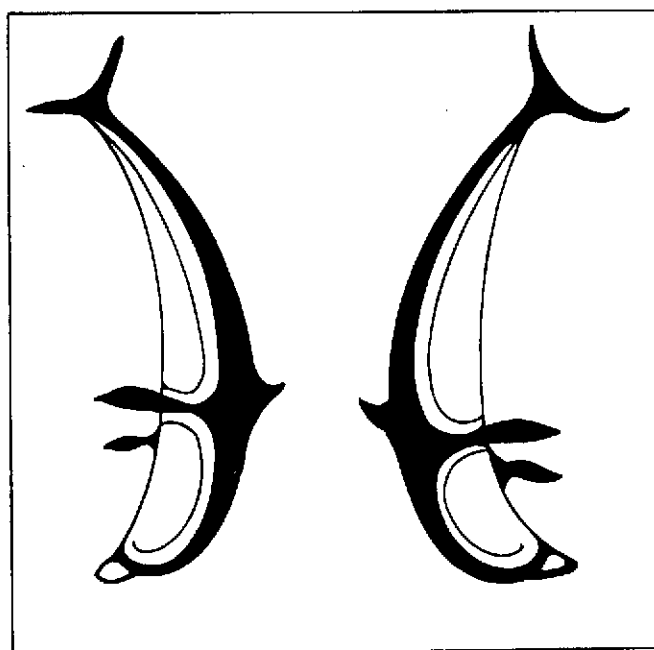


Figure 12 : Cette mosaïque grecque donne un exemple de symétrie dans l'art[†]. Un examen attentif montre de nombreuses différences (brisures) entre les 2 côtés... l'impression globale est cependant celle de symétrie !

[†] Les lecteurs intéressés par des idées générales sur la symétrie et la supersymétrie en physique et dans le domaine artistique consulteront avec profit les références 18.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - Voir par exemple :
M. Vergnes et F. Iachello, Annales de Physique 8 (1983)583, et références incluses
- 2 - E. Wigner, Phys. Rev. 51 (1937)106
- 3 - M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125 (1962)1067
Y. Ne'eman, Nucl. Phys. 26 (1961)222
- 4 - A. Messiah, "Mécanique Quantique", Dunod, Paris, (1959), Chap. XIV
- 5 - H.E. Haber and G.L. Kane, "Is Nature Supersymmetric ?", Scientific American 254 (1986)6
- 6 - F. Iachello, Physica 15D (1985)85 et références incluses
- 7 - O. Scholten, Ph. D. Thesis, Université de Groningen, Pays-Bas (1980)
O. Scholten and N. Blasi, Nucl. Phys. A380 (1982)509
- 8 - F. Iachello, Phys. Rev. Letters 44 (1980)772
F. Iachello and S. Kuyucak, Ann. Phys. (N-Y) 136 (1981)19 et références incluses
- 9 - B.H. Flowers, Proc. Royal Soc. (London) A212 (1952)248
- 10 - R. Gilmore, "Lie groups, Lie algebras and some of their applications" Wiley (N-Y)1974
- 11 - A.B. Balantekin, I. Bars and F. Iachello, Nucl. Phys. A370 (1981)284 and Phys. Rev. Letters 47 (1981)19
- 12 - P.G.D. Freund and I. Kaplanski, J. Math. Phys. 17, (1976)228
- 13 - M. Vergnes, "Interacting Boson-Boson and Boson-Fermion Systems", ed. by O. Scholten, World Scientific (Singapour)p. 91-103, et références incluses
M. Vergnes, Proceedings of "International Conference on Nuclear Structure, Reactions and Symmetries", Dubrovnik, Yougoslavie (à paraître : World Scientific). Pré-tirage : Rapport Interne Orsay IPNO-DRE 86-08.
- 14 - A.B. Balantekin, I. Bars, R. Bijker and F. Iachello, Phys. Rev. C27 (1983)1761
R. Bijker, Ph. D. Thesis, Université de Groningen, Pays-Bas (1984)
P. Van Isacker, A. Frank and H.Z. Sun, Annals of Physics 157, (1984)183
- 15 - P. Van Isacker, J. Jolie, K. Heyde and A. Frank, Phys. Rev. Letters 54 (1985)653
- 16 - P. Van Isacker, Proceedings of "International Conference on Nuclear Structure, Reactions and Symmetries", Dubrovnik, Yougoslavie (à paraître : World Scientific)
- 17 - O. Castaños, E. Chacón, A. Frank and M. Moshinsky, J. Math. Phys. 20 (1979)35
- 18 - F. Iachello, "The mysterious world of Symmetry in Physics" Yale Report YNT 86-08
F. Iachello, "Supersymmetry in Nuclei", American Scientist 70 (1982)294